数理解析研究所講究録
1062巻 1998年 150-158

Prawitzの定理の周辺

東京電機大 鶴見和之
(Kazuyuki Tsurumi)

1変数の単位円内の正則単葉函数の境界挙動については，種々なされており，それらのいくつかはPommerenke[5]にまとめられている。特に，非有界な単葉函数についての境界値を調べるには，Prawitzの定理が基本的な役割を演ずる。本講は，この定理が$\mathbb{C}^n$の場合にどうなるかを考える1つの試みである。

§1. Prawitzの定理.

$U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$：単位円

$S :=$ Uで定義された，正則，単葉，正規された函数の集合

$$M_p(r, f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \quad \begin{pmatrix} 0 < p < \infty \\ 0 < r < 1 \end{pmatrix}$$

$$M_\infty(r, f) := \max_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$$

本節では，Duren[1]，p.61 の Prawitz の定理（Theorem 2.22）の別証を与える。

<u>Lemma</u>：[1, p.62]．C_1，C_2 を原点をかこむ，なめらかな Jordan 曲線とし，C_1 は C_2 の内部にあるものとする。このとき，次の式が成り立つ：

$$\int_{C_1} r^p d\theta \leqq \int_{C_2} r^p d\theta \qquad (0<p<\infty)$$

（ただし，$z = re^{i\theta}$）． ◻

証明は Green の定理による。

<u>定理</u> [Prawitz の定理，[1]，p.61]．$f \in S$，$0<p<\infty$ に対して，次の式が成り立つ：

$$M_p^p(r,f) \leqq p\int_0^r \frac{1}{t} M_\infty^p(t,f)\,dt \qquad (0<r<1)$$ ◻

（証明）

$z = re^{i\theta}$，$\bar{z} = re^{-i\theta}$ に対して，

$dz = e^{i\theta}dr + ire^{i\theta}d\theta$，$d\bar{z} = e^{-i\theta}dr - ire^{-i\theta}d\theta$

$\bar{z}dz = rdr + ir^2 d\theta$，$zd\bar{z} = rdr - ir^2 d\theta$

$$\therefore \quad d\theta = \frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{2r^2 i} \qquad \text{----} \ (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \qquad \text{---} \ (2)$$

$w=f(z)\in S$ に対して、 $f(z)=Re^{i\Theta}$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial R}{\partial w}=\frac{1}{2R}\overline{w},\quad \frac{\partial R}{\partial \overline{w}}=\frac{1}{2R}w.$$

と (2) により、

$$\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{1}{2rR}\left\{\overline{w}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)z+\overline{z}\,\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}w\right\}$$

これより、

$$2\pi\frac{d}{dr}M_p^p(r,f)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial R^p}{\partial r}d\theta$$

$$=p\int_0^{2\pi}R^{p-1}\frac{\partial R}{\partial r}d\theta=(*)$$

ここで、 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial w}dw.\quad d\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)}d\overline{w}$ より

$$d\theta=\frac{\overline{z}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)dw-z\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)}d\overline{w}}{2r^2i}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial R}{\partial r}d\theta=\frac{1}{2r^3Ri}\left\{\overline{w}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)z+\overline{z}\,\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}w\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\overline{z}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)dw-z\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)}d\overline{w}\right\}$$

$$=\frac{1}{2r^3Ri}\Big[|z|^2\left\{\overline{w}dw-wd\overline{w}\right\}$$

$$+\left\{\overline{z}^2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)wdw-z^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)}\overline{w}d\overline{w}\right\}\Big]$$

ここで、[ ] 内の第2項は $\overline{z}^2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)wdw$ の虚部であるから

$$\int_{\Gamma_r} \frac{R^{p-2}}{4r^3 i}\left\{\bar{z}^2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right) w\,dw - z^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)}\bar{w}\,d\bar{w}\right\} = 0$$

$$\therefore (*) = \frac{p}{r}\int_{\Gamma_r} R^p \frac{\bar{w}\,dw - w\,d\bar{w}}{2R^2 i} = \frac{p}{r}\int_{\Gamma_r} R^p d\Theta$$

$C_1 = \Gamma_r$, $C_2 := \{|w| = M_\infty(r, f) + \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ として, Lemmaを用いて,

$$\int_{C_1} R^p d\Theta \leqq \int_{C_2} (M_\infty(r, f) + \varepsilon)^p d\Theta = 2\pi(M_\infty(r, f) + \varepsilon)^p$$

ここで, $\varepsilon \to 0$ として

$$\frac{d}{dr} M_p(r, f) \leqq \frac{p}{r} M_\infty^p(r, f)$$

これを積分して, 定理の式が得られる。

Prawitzの定理として,

<u>系</u>. $H^p \supset S \quad (p < \frac{1}{2})$

証明は, Growth Theoremを用いる。

この系より, 函数 $f(z) \in S$ の radial limit

$$\lim_{r \to 1-0} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

はほとんど到る所存在する。

また, 境界値 $f(e^{i\theta})$ はほとんど到る所0にならない。([5], p.70).

§2. $\mathbb{C}^n$ へのPrawitzの定理の拡張

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$z^* = (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$，$r := \|z\| := \sqrt{z^* z}$，$\partial z = \begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_n \end{pmatrix}$，$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$，

$\frac{\partial}{\partial z^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}$，（$*$は転置共役）

$\mathbb{B}_r := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r \}$，$\mathbb{B} := \mathbb{B}_1$，$S_r := \mathrm{bdry}\, \mathbb{B}_r = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = r \}$，$S := S_1$

いま，$w = f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$ を holomorphic map in $\mathbb{B}$，

単葉とすると，$z = f^{-1}(w) =: g(w)$ が存在し，

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} : \text{nonsingular}$$

で

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial g}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial w_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial w_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}$$

また，$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right) =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial w_1} \cdots \frac{\partial}{\partial w_n}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

いま，$R := \| f(z) \|$ とおくと，

$$\frac{\partial R^2}{\partial w}\left(= 2R\frac{\partial R}{\partial w}\right) = \frac{\partial (w^* w)}{\partial w} = w^* \quad \therefore \frac{\partial R}{\partial w} = \frac{1}{2R} w^*$$

また，$z = r a$，$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $(\|a\| = 1)$ とおくと．

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z^*}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z} a + a^* \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial z} z + z^* \frac{\partial}{\partial z^*}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial R}{\partial z} z + z^* \frac{\partial R}{\partial z^*}\right) = \frac{1}{2rR}\left\{ w^* \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) z + z^* \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^* w \right\} \quad \cdots (1)$$

また，

$$dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n = \frac{1}{n!} \left| \partial z, \cdots, \partial z \right|$$

$$= \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} dz_1 & dz_1 & \cdots & dz_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ dz_n & dz_n & \cdots & dz_n \end{vmatrix}$$

$dz[j] := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge \cdots dz_n$ （dz_j を除いたもの）

$$\eta(z) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} z_j \, dz[j] = \frac{1}{(n-1)!} \left| z \, \partial z \cdots \partial z \right|$$

（これを Leray form という）

$$\partial z = \begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial w_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_n}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_1 \\ \vdots \\ dw_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial w$$

$$\therefore\ dz = \frac{1}{n!}\left|\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)(\partial w \cdots \partial w)\right| = \frac{1}{n!}\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right| dw \quad \cdots (2)$$

$$\eta(z) = \frac{1}{(n-1)!}\left| z,\ \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial w,\ \cdots,\ \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial w \right|$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right| \left| \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-1} z, \partial w, \cdots, \partial w \right| \quad \cdots (3)$$

$d\bar{z} := d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$, $\eta(\bar{z})$：z を $\bar{z}$ でおきかえたもの，とし，

$$\theta_n(z) := \frac{1}{(2r^2 i)^n}\left\{\eta(\bar{z}) \wedge dz + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \eta(z) \wedge d\bar{z}\right\} \quad \cdots (4)$$

とおくと，$\theta_n(z)$ は S 上の面素である。

(1), (2), (3), (4)より，

$$\frac{\partial R}{\partial r}\theta_n(z) = \frac{1}{2Rr(2r^2 i)^n}\left\{ w^* \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-1} z + z^* \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{*-1} w \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(n-1)!}\left\{ \left|\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-1} z, \partial w \cdots \partial w\right| \wedge dw + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left|\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-1} z, \partial w, \cdots \partial w\right| \wedge d\bar{w} \right\}$$

この form の球面 S への正射影を作ると

$$= \frac{r}{2R(2r^2 i)^n}\left\{ \eta(\bar{w}) \wedge dw + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \eta(w) \wedge d\bar{w} \right\}$$

（1変数の場合と同様にして.）

$M_p(r, f)$, $M_\infty(r, f)$ を1変数の場合と同様に定義すると

(mes(S) を S の体積とすると)

$$\mathrm{mes}(S)\frac{d}{dr}M_p^p(r,f) = \int_S \frac{\partial R^p}{\partial r}\,\theta_n(z)$$

$$= p\int_{S_r}\frac{R^{p+2n-2}}{r^{2n-1}}\,\theta_n(w) = \frac{p}{r^{2n-1}}\int_{S_r} R^{p+2n-2}\theta_n(w)$$

$$\leqq \frac{p}{r^{2n-1}}\left(M_\infty(r,f)\right)^{p+2n-2}\cdot \mathrm{mes}(S).$$

よって, 次の定理が得られる:

<u>定理.</u> $f(z)$ を $\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への単葉, 正則, 正規化された写像とすると, 次の式が得られる.

$$M_p^p(r,f) \leqq p\int_0^r \frac{1}{t^{2n-1}} M_\infty^{p+2n-2}(t,f)\,dt$$

$$(0<p<\infty,\ 0<r<1)$$

文献

[1] L. A. Aĭzenberg and Sh. A. Dautov : Differential Forms, Orthogonal to Holomorphic Functions or Forms, and their Properties, Transl. of Math. Monographs 56. A. M. S. (1983)

[2] P. L. Duren : Univalent Functions, Springer-Verlag (1980)

[3] S. G. Krantz : Function Theory of Several Complex Variables, John Wiley & Sons (1982)

[4] A. J. Lohwater and G. Piranian : On the derivative of a univalent function, Proc. A. M. S. 4 (1952) 591–594.

[5] T. H. MacGregor : Radial growth of a univalent function and its derivative off sets of measure zero, Contemporary Math. 38 (1985) 65–76.

[6] Ch. Pommerenke : Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer Verlag (1992)

[7] W. Rudin : Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer Verlag (1980)